Автор: Давиденко И.А., преподаватель математики

Предел числовой последовательности

Множество N-множество натуральных чисел обладает свойством упорядоченности, а именно, для любых двух произвольных натуральных чисел a и b справедливо утверждение: либо a меньше или равно b, либо $b \leq a$. Это свойство множества N позволяет производить «пересчет» осязаемых и абстрактных объектов.

Определим на множестве N некоторую функцию (отображение).

$$N \xrightarrow[b]{f} A$$

Отображение множества N в множество A называется <u>последовательностью элементов</u> из A. При этом множество A может содержать объекты произвольной природы и задание последовательности элементов из A состоит в том, что каждому элементу a' из некоторого подмножества A' множество A сопоставляется определенный элемент n из множества N и наоборот: $\forall n \in N \exists$ элемент $a' \in A' \subset A$, ему соответствующий.

Отображение может быть не взаимно-однозначным: один и тот же элемент из A может служить образом многих различных чисел из N.

Будем обозначать значения функции малыми буквами латинского алфавита с индексами, равными значениям аргумента: $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2), \ldots\ a_n = f(n) \ldots$

или $\{a_n\} = a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$;

a_n называется общим членом последовательности. Отметим, что элементы последовательности необязательно различны.

Таким образом, задать последовательность элементов из некоторого множества A значит указать закон, по которому любому фиксированному числу $n \in N$ сопоставляется определенный элемент из A, а «пересчет» объектов множества A' состоит в том, что по заданному $n \in N$ (номеру) мы можем указать объект $a \in A'$, соответствующий этому номеру.

Две последовательности $\{a_n\} = a_1, a_2, ..a_{n...}$ и $\{b_n\} = b_1, b_2, ..b_n, ...$ называются равными, если $a_n = b_n$ для любого $n \in N$.

Определение. Число а называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если для любого положительного числа ε, сколь бы мало оно не было, найдется такое положительное число N, что для всех значений $n \geq N$ выполнено неравенство:
$|a_n - a| \leq \varepsilon$.
Тот факт, что последовательность имеет предел а, выражается следующей записью:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

Если последовательность $\{a_n\}$ имеет конечный предел, то она называется сходящейся.
Говорят также, что в этом случае она сходится к числу а. Если последовательность $\{a_n\}$ имеет конечный предел a, то она ограничена, то есть существует такое число М, что $|a_n| \leq M$ для любого n.

Теорема. Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, то этот предел только один.
- Последовательность $\{a_n\}$, обладающая свойством $a_n \leq a_{n+1}$ для любого n, называют монотонно возрастающей(неубывающей)
Последовательности $\{a_n\}$, для которых $a_n < a_{n+1}$ для любого n, называются строго монотонно возрастающими.
Последовательности $\{a_n\}$, для которых $a_n > a_{n+1}$ для любого n, называются строго монотонно убывающими.
Последовательности , для которых $a_n \geq a_{n+1}$ для любого n, называются монотонно убывающими (невозрастающими).

Например, последовательность 1, $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\frac{1}{n},\ldots$-строго монотонно убывающая.

Монотонные последовательности могут приближаться к своему пределу лишь с одной стороны: справа или слева.

Существуют колеблющиеся последовательности, имеющие предел. Например, -1, $\frac{1}{2}$,-$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$,..

Эта последовательность сходится к нулю, приближаясь к нему с обеих сторон.

Свойства монотонных последовательностей:

1. Монотонно возрастающая числовая последовательность, ограниченная сверху, имеет конечный предел, совпадающий с точной верхней границей множества.

Замечание. Отметим, что если последовательность монотонно возрастает и не ограничена сверху, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, где $+\infty$ - несобственный предел последовательности $\{a_n\}$.

2.Если числовая последовательность монотонно убывает и ограничена снизу, то есть, $a_n > m,\ \ m > -\infty$ то она всегда имеет конечный предел.

Замечание. Если последовательность монотонно убывает и неограничена снизу, ее несобственным пределом служит $-\infty$.

Бесконечно малые последовательности

Последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно малой, если она имеет предел, равный нулю.

$\forall\varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon):\ \forall n \geq N\ \ |a_n| < \varepsilon$

Свойства:

1. Сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть последовательность бесконечно малая.
2. Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Бесконечно большие последовательности

Последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно большой, если $|a_n| \to \infty$ при $x \to \infty$.

Если последовательность $\{a_n\}$ является бесконечно большой последовательностью, то последовательность $\{\alpha_n\}$, определенная соотношением $\alpha_n = \dfrac{1}{a_n}$ $n > n_0$, является бесконечно малой.

Если $\{\alpha_n\}$ является бесконечно малой последовательностью, то последовательность $\{a_n\}$ определяемая соотношением $a_n = \dfrac{1}{\alpha_n}$, $\alpha_n \neq 0 (n > n_0)$ является бесконечно большой.

Свойства пределов последовательностей:

1. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится(то есть имеет предел), причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Тогда сходится последовательность:
$\{c \cdot a_n\}$, c=const и предел этой последовательности вычисляется по формуле:

$$\lim_{n\to\infty}(c \cdot a) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$$

2. Пусть последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ сходятся, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Тогда сходятся последовательности $\{a_n \pm b_n\}$ и пределы этих последовательностей вычисляются по формулам $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$.

3. Пусть последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ сходятся, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ =b. Тогда сходится последовательность $\{a_n \cdot b_n\}$ и предел этой последовательности вычисляется по формуле:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$$

4. Пусть последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ сходятся, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, , $b_n, b \neq 0$. Тогда сходится последовательность $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ и предел этой последовательности вычисляется по формуле:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{x\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

5. Пусть последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ =c и пусть при $\forall_n \geq N$ выполнено неравенство:

$a_n \leq c_n \leq b_n$.

Тогда сходится последовательность $\{c_n\}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

Предел функции

1. Число А называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любого $E > 0$ существует число $\delta(E) > 0$ такое, что при $0 < |x - a| < \delta(E)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < E$. Это записывается так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \textit{ или } f(x) \to A \textit{ при } x \to a$$

Если число A_1 есть предел функции $y = f(x)$ при $x \to a$ так, что x принимает только значения, меньше *a*, то число A_1 называется левым (левосторонним) пределом функции в точке *a*.

$$f(a-0) = \lim_{x\to a-0} f(x) = A_1 \textit{ или } f(x) \to A_1 \textit{ при } x \to a-0$$

Аналогично определяется правый (правосторонний) предел функции $y = f(x)$ при $x \to a$

$$f(a+0) = \lim_{x\to a+0} f(x) = A_2 \textit{ или } f(x) \to A_2 \textit{ при } x \to a+0$$

В случае, если левый и правый пределы функции $y = f(x)$ существуют и равны, т.е. $A_1 = A_2 = A,$ число А есть предел этой функции.

Число B называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого $E > 0$ существует число $E > 0$ такое, что при $|x| > M(E)$ выполняется неравенство $|f(x) - B| < E$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = B \textit{ или } f(x) \to B \textit{ при } x \to \infty.$$

2. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при x, стремящимся к a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$

Аналогично определяется бесконечно малой и бесконечно большой функции при $x \to \infty$.

Между бесконечно малой и бесконечно большой функциями существует связь:

1. Функция, обратная по величине бесконечно большой, является бесконечно малой.
2. Функция, обратная по величине бесконечно малой, являлся бесконечно большой.

Свойства бесконечно малых функций:

1. Сумма или разность двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.
2. Произведение бесконечно малой функции на функцию ограниченную (на постоянную, на бесконечно малую функцию) есть функция бесконечно малая.

Свойства бесконечно больших функций:

1. Сумма бесконечно большой функции и функции ограниченной, есть бесконечно большая функция
2. Сумма двух бесконечно больших функций одного знака, есть бесконечно большая функция того же знака.
3. Произведение бесконечно большой функции на функцию, превосходящую по абсолютному значению некоторую положительную постоянную, есть функция бесконечно большая.

Основные теоремы о пределах функций.

1. Если С - постоянная величина, то $\lim\limits_{x \to a} C(x) = c$
2. Если С – постоянная, то $\lim\limits_{x \to a} Cf(x) = C \lim\limits_{x \to a} f(x)$
3. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a} f_1(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} f_2(x)$, то выполняются равенства:

1) $\lim\limits_{x \to a}(f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) \pm \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$

2) $\lim\limits_{x \to a}(f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$

3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to a} f_2(x)}, \quad \lim\limits_{x \to a} f_2(x) \neq 0$

4) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x))^{f_2(x)} = (\lim\limits_{x\to a}(f_1(x))^{\lim\limits_{x\to a}(f_2(x))}$

4. Если в некоторой окрестности точки $x=a$ (кроме, быть может самой точки a) выполнено условие $f(x)=\varphi(x)$ и если предел одной из этих функций в точке a существует, то

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$

5. Если существует $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ и $f(x)$ - элементарная функция, то выполняется равенство:

$\lim\limits_{x\to a} f(\varphi(x)) = f(\lim\limits_{x\to a}\varphi(x))$.

Практические приемы вычисления пределов функции.

Если функция *f(x)* в предельной точке *x=a* не определена, тогда вычисление предела требует индивидуального подхода. В одних случаях вопрос сводится к применению теории о свойствах бесконечно малой и бесконечно большой функций и связи между ними.

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда подстановка предельного значения аргумента в выражение для f(x) приводит к одной из неопределенностей: $\infty-\infty$; $0\cdot\infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; 1^{∞}; 0^0; ∞^0

Здесь можно воспользоваться правилом вычисления пределов отношения двух многочленов при $x\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^k+a_{1x}x^{k-1}+\ldots+a_k}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}=\begin{cases}\infty, если..k>n\\ \dfrac{a_0}{b_0}, если..k=n\\ 0, если..k<n\end{cases}$$

При раскрытии неопределенностей используют следующие математические приемы:

1) Сокращение дроби на множитель $(x-a)^{\alpha}$ при $x \to a$.
2) Избавление от иррациональности в числителе или знаменателе дроби.
3) Разложение многочленов на линейные или квадратичные множители при $x \to a$

Примеры.

Используя свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций, вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x \sin x = 0$ (т.к. $3^{-\infty}$ – бесконечно малая функция, $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ – ограниченная)

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2^x + 5^x) = 0$ (сумма двух бесконечно малых функций)

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-8x + \log_{\frac{1}{2}} x) = -\infty$ (сумма двух бесконечно больших отрицательных функций)

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2 + arctgx) = +\infty$ (сумма бесконечно большой положительной функции и ограниченной)

Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{arctg\, x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} arctg\, x \cdot \dfrac{1}{x} = 0$ (произведение ограниченной функции на бесконечно малую)

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{4^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \cos x \cdot \dfrac{1}{4^x} = 0$ (произведение ограниченной функции и бесконечно малую)

Вычислить пределы, используя приемы раскрытия неопределенностей:

1) $$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-4$$

2) $$\lim_{x\to \frac{1}{3}}\frac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to \frac{1}{3}}\frac{3(x-\frac{1}{3})(x+1)}{(3x-1)(9x^2+3x+1)}=$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{3}}\frac{x+1}{9x^2+3x+1}=\frac{4}{3\cdot 3}=\frac{4}{9}$$

3) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+5}{x^3+3x+7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{3x}{x^3}+\frac{7}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{1+\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}}=$$

$$\frac{0-0+0}{1+0+0}=0$$

4) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right)=$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x+1)-2}{(x-1)(x+1)}\right)==\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

5)

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}+2)}{(\sqrt{x+6}-2)(\sqrt{x+6}+2)}=$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}+2)}{x+6-4}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}\cdot\lim_{x\to -2}(\sqrt{x+6}+2)=$$

$$\lim_{x\to -2}(x-1)\cdot 4=-3\cdot 4=-12$$

6)

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2})}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1-x-2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}} == \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \frac{1-0}{0} = \infty$$

Замечательные пределы.

Чтобы раскрыть неопределенности при вычислении пределов, используются 1-й и 2-й замечательные пределы.

1 – й замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

2 – й замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$,

где $e \approx$ 2,17 – число Непера.

Вычислить пределы, используя замечательные:

1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{7x\cdot 3x}{\sin 3x\cdot 3x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{7x}{3x}\right) =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{7x}{3x} = 1\cdot 1\cdot\frac{7}{3} = \frac{7}{3}$$

2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg10x}{\sin^2 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{\cos 10x\cdot\sin^2 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 10x\cdot 10x}{10x\cdot\cos 10x\cdot\sin^2 2x}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{10x}}_{1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2x}{\cos 10x\cdot\sin^2 2x}==\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5}{\cos 10x\cdot\sin 2x}=1\cdot\frac{5}{1\cdot 0}=\infty$$

3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=$$

$$1\cdot\infty=\infty$$

4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{ctgx\cdot(1-\cos^2 3x)}{(x^2+5x)}=\frac{\infty\cdot 0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot(1-\cos^2 3x)}{\sin\ x\cdot(x^2+5x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^{\to 1}\cdot(1-\cos^2 3x)}{\sin\ x\cdot(x^2+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{\sin\ x\cdot(x^2+5x)}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin\ x\cdot x\cdot(x+5)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin\ x\cdot x\cdot(x^{\to 0}+5)}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin\ x\cdot x}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\ 3x\cdot\sin\ 3x}{\sin\ x\cdot x}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin\ 3x\cdot\sin\ 3x}{\sin\ x\cdot 3x\cdot 3x\cdot\frac{1}{9}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\frac{1}{9}}=\frac{9}{5}$$

5)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\cdot\sin 2x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{5}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}\cdot 2x}$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2\lim_{x\to 0}\sin 2x=\frac{2}{5}\cdot 2\cdot 0=0$$

6)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x\cdot\frac{3}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x\cdot\frac{4}{3}}=$$

$$\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{4}{3}}=e^{\frac{4}{3}}$$

7) $$\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{4}{3x}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{4\cdot 5}{3\cdot 5x}}=\left(\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}}\right)^{\frac{20}{3}}=e^{\frac{20}{3}}$$

8) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{1}=$$

$$\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}}_{e}\cdot\underbrace{\lim\left(1+\frac{1}{x-1}\right)}_{1}=e$$

Задачи для самостоятельного решения.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x}{x^2+4x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-6x^2+9}{10x-5x^4}$

3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-8x+15}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x-6}{2x^2-6x^3+1}$

5) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{10}}{x-10}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 2x}{4x^3}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{7x}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{\frac{x}{2}}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{4x}\right)^{5x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{4}}{5x^2}$